Олимпиада по экономике для учащихся 7-8-х классов

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

25 февраля 2015 год.

Всего за задачи 100 баллов **Время выполнения 140 минут**

Задача 1. Непарные ботинки (25 баллов)

Предприниматель Хитров принял участие в финальной распродаже зимней коллекции обуви 2014 года модного дома «Хрустальная туфелька». Ему удалось купить оптом за 2400 рублей партию левых ботинок (каждый левый ботинок обошелся ему в 60 рублей) и за 700 рублей партию правых ботинок (каждый правый ботинок обошелся ему в 20 рублей). Из этих ботинок он сформировал полноценные пары (все закупленные ботинки одного размера, цвета, артикула), однако с трудом нашел единственного покупателя, который готов купить любое количество обуви по цене 100 рублей за пару. Но тут к нему неожиданно обратился некто Джон Сильвер с просьбой продать ему один правый ботинок, за который он готов заплатить 55 рублей!

а) Стоит ли Хитрову, при прочих равных условиях, продать Джону Сильверу так необходимый ему ботинок? Если «да», то какой будет выгода предпринимателя Хитрова? Если «нет», то почему?

б) Изменится ли ваш ответ, если окажется, что Джону Сильверу нужен не правый, а левый ботинок? Ответ обоснуйте.

Решение

а) Нет, эта сделка будет Хитрову невыгодна. Всего Хитров закупил (2400/60=40) левых ботинок и (700/20=35) правых ботинок и, значит, подготовил 35 пар на продажу. За них он может выручить (35*100=3500) рублей. Продав один правый ботинок Джону Сильверу, Хитров «теряет» 100 рублей, так как придется расформировать пару обуви. Ввзамен он получит всего 55 рублей, а значит потеряет часть возможного дохода, при этом потери составят 45 рублей. Расходы на приобретение непарной обуви в модном доме в расчет в данном случае принимать не следует, так как это необратимые издержки.

Возможен иной расчет, который приводит к такому же выводу.

Затраты Хитрова на покупку обуви в модном доме равны (2400+700=3100) рублей.

Выручка Хитрова, если он продаст правый ботинок, будет равна (34*100+55=3455) рублей, соответственно прибыль составит 355 рублей.

Выручка Хитрова, если он НЕ продаст правый ботинок, будет равна (35*100= 3500) рублей, соответственно прибыль составит 400 рублей.

Вывод – продавать на этих условиях один правый ботинок НЕВЫГОДНО (355 рублей меньше 400 рублей).

б) Вот если бы Джону Сильверу нужен был левый ботинок, то Хитров был бы готов его продать по ЛЮБОЙ цене, ведь теперь он может продать всю обувь в парах и еще один непарный левый ботинок. В данном же случае его выручка составит (35*100+55=3555), а прибыль соответственно составит 455 рублей. (455 рублей больше 400 рублей).

Критерии оценивания

а) Нет, правый ботинок не продавать - **15 баллов**

б) Да, левый ботинок продать - **10 баллов**

(Максимум баллов может быть получен только при условии наличия грамотного обоснования).

Задача 2. Аннуитет Ерофея (25 баллов)

31 декабря 2012 года Ерофей взял в «Бета-банке» некую сумму в кредит на срок 4 года по ставке 25 % годовых. Договор предусматривает погашение кредита по популярной *аннуитетной* схеме: в конце каждого года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 25 %), а затем Ерофей переводит в банк платеж в размере X рублей (X одинаковый во всех периодах). Банк рассчитал, что для того, чтобы долг был полностью выплачен за 4 года, X должен равняться 625 тыс. рублей. Найдите сумму, которую Ерофей взял в кредит.

Решение

Обозначим искомую сумму за B. В конце первого года долг составит $1{,}25B - X = 1{,}25B - 625$. В конце второго года долг составит $1{,}25(1{,}25B - 625) - 625$. Продолжая эту цепочку, получаем, что в конце четвертого года долг равен

$1{,}25[1{,}25(1{,}25(1{,}25B - 625) - 625) - 625] - 625 = 0$.**(20 баллов)**

Раскрывая скобки и решая это уравнение, получаем, что $B = 1476$. **(5 баллов)**

Ответ: 1 476 тыс. руб.

Задача 3. Показометры (25 баллов)

Фирма получила государственный заказ на производство *показометров* (объем производства и цена зафиксированы в заказе). Фирма выполняет заказ на своих двух заводах. Себестоимость одного показометра на первом заводе на четверть ниже, чем на втором, а объем производства — в 2 раза больше. В целом для фирмы, по расчетам бухгалтера, рентабельность выполнения заказа равна 20 % (рентабельность — это отношение прибыли к себестоимости, выраженное в процентах).

а) Какую часть общей прибыли приносит фирме каждый завод?

б) В результате оптимизации затрат себестоимость производства одного показометра на втором заводе удалось снизить на 10 %. Перераспределения производства с одного зовода на другой при этом не произошло из-за ограничения мощностей. Чему теперь равна рентабельность производства показометров фирмой? Как изменилась доля каждого завода в общей прибыли фирмы?

Решение

P – цена показометра (в соответствии с госзаказом)

Q – общий объем производства показометров (в соответствии с госзаказом)

A – себестоимость производства одного показометра на втором заводе.

А) ***(15 баллов за пункт)***

На первом заводе производится 2/3 всего заказа, на втором – 1/3.

Тогда:

Общая стоимость производства:

на первом заводе: $\frac{2}{3}Q \cdot 0.75A$

на втором заводе: $\frac{1}{3}Q \cdot A$

всего для фирмы: $TC = \frac{2}{3}Q \cdot 0.75A + \frac{1}{3}Q \cdot A = \frac{5}{6}QA$

так как рентабельность производства равна 20%, то

$\frac{PQ}{\frac{5}{6}QA} = 1.2 \ \rightarrow \ \frac{6 \cdot P}{5 \cdot A} = 1.2 \ \rightarrow \ P = A$***(10 баллов за данный этап)***

Следовательно, прибыль второго завода равна нулю, и всю прибыль зарабатывает первый завод. (***5 баллов за определение прибыли 1-го и 2-го заводов)***

Б) ***(10 баллов за пункт)***

После изменения себестоимости $TC = \frac{2}{3}Q \cdot 0.75A + \frac{1}{3}Q \cdot 0{,}9 \cdot A = 0{,}8 \cdot QA$

$$Rent = \frac{A}{0.8A} = 1.25$$

То есть рентабельность увеличилась до 25%.

Прибыль, «зарабатываемая» первым заводом, $A \cdot \frac{2}{3}Q - \frac{1}{2}AQ = \frac{1}{6}AQ$

Прибыль, «зарабатываемая» вторым заводом, $A \cdot \frac{1}{3}Q - 0.9 \cdot A \cdot \frac{1}{3}Q = \frac{1}{30}AQ$

Доля первого завода: $\frac{\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)} = \frac{5}{6}$ ***(5 баллов)***

Доля второго завода: $\frac{\frac{1}{30}}{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)} = \frac{1}{6}$ ***(5 баллов)***

Ответ: а) всю прибыль зарабатывает первый завод; б) рентабельность равна 25%, доля первого завода равна 5/6, доля второго – 1/6.

Задача 4. Квачи и метикалы (25 баллов)

На валютном рынке небольшой страны национальная валюта *квачи* обменивается на иностранную валюту *метикалы*. Спрос на метикалы задан функцией $Q = 140 - 2e$, а предложение метикалов — функцией $Q = 4e - 40$, где e — стоимость метикала, выраженная в квачах. Чему равно равновесное количество обмениваемых квачей?

Решение:

$140 - 2e = 4e - 40, \rightarrow e = 30$ квачей за метикал (5 баллов), $Q^e = 80$(5 баллов) метикалов. ***(всего10 баллов за эти этапы)***

Следовательно, равновесное количество квачей равно $80 * 30 = 2400$. ***(15 баллов за определение равновесного количества квачей).***

Ответ: 2400 квачей.

Олимпиада по экономике для учащихся 9-10-х классов

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

25февраля 2015 год.

Всего за задачи 100 баллов **Время выполнения 140 минут**

Задача 1. Мастерская «Столы & стулья» (25 баллов)

Маленькая мастерская «Столы & стулья» специализируется на выполнении заказов по изготовлению столов и стульев. В мастерской работают три брата. Каждый из братьев за месяц готов изготовить максимум 40 стульев, однако их желания и возможности по изготовлению столов сильно различаются.

- Старший брат — на все руки мастер, может делать и столы, и стулья, при этом альтернативная стоимость изготовления 1 стола для него всегда равна 2-м стульям.
- Средний брат тоже может изготавливать и столы, и стулья, однако он принципиально придерживается правила: столы и стулья он будет производить *только* комплектами — 1 стол и к нему 4 стула. Так и никак иначе!
- Младший брат не так давно начал работать в мастерской и все никак не научится делать столы, хотя стулья у него получаются не хуже, чем у братьев.

а) Покажите на графике в координатных осях X и *Y* множество производственных возможностей мастерской, указав на горизонтальной оси X количество изготавливаемых стульев, а на вертикальной оси *Y* количество изготавливаемых столов. Объясните логику ваших построений.

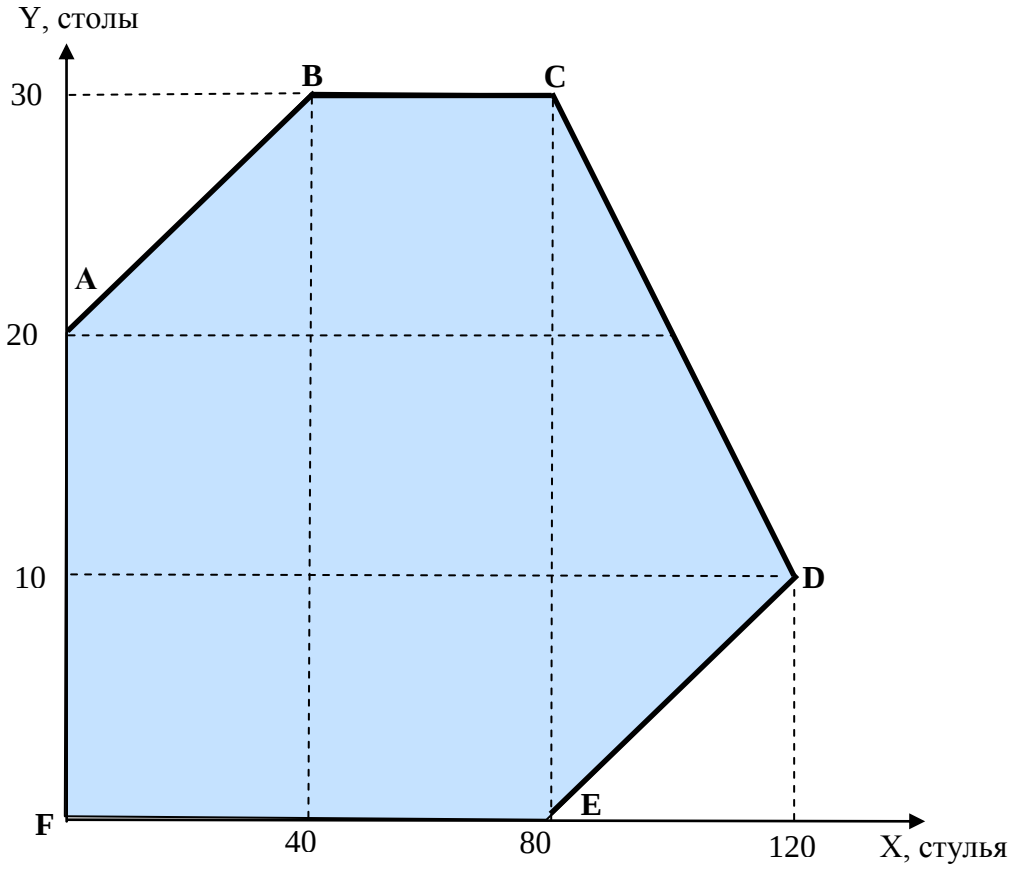
б) В мастерскую обратились 3 клиента: Иванов, Петров и Сидоров. Иванов хочет заказать 5 столов и 110 стульев и готов за заказ заплатить 50 тысяч рублей. Петрову нужно 20 столов и 82 стула, за заказ он готов заплатить 70 тысяч рублей. Сидоров очень хочет приобрести 8 столов и 4 стула и готов заплатить 30 тысяч рублей. Очевидно, что выполнить все заказы мастера не смогут, кому-то придется отказать. Исходя из возможностей мастерской, дайте обоснованные рекомендации по организации работы братьев-мастеров на следующий месяц, следуя которым мастерская сможет получить максимальный доход. Покажите решение на графике.

Решение

а)Множество производственных возможностей мастерской – это многоугольник ABCDEF.

Логика построения этого множества может быть такой:

отрезок FA – мастерская производит только столы, производством занимается только старший брат, максимально он может произвести только 20 столов (точка A);



отрезок AB – мастерская начинает производить и стулья, производством которых следует заняться среднему брату, при этом растет и количество производимых столов, так как он производит мебель только комплектами – в точке B старший брат делает 20 столов, а средний брат 40 стульев и 10 столов;

отрезок BC – к производству стульев подключается младший брат, максимально он может произвести 40 стульев, прироста столов уже быть не может – в точке C производится 30 столов и 80 стульев;

отрезок CD – мастерская еще может нарастить производство стульев, но только за счет уменьшения производства столов старшим братом, при этом максимально может быть произведено 120 стульев – точка D;

отрезок DE – если мастерская начнет сокращать производство столов, то прироста производства стульев не будет, так как столы делает только средний брат, а сокращая количество производимых столов, он одновременно сокращает и производство стульев;

отрезок EF – старший и младший брат делают только стулья.

б) Составим таблицу, которая покажет возможности мастерской, связанные с выполнением заказов

заказы	только заказ Иванова	только заказ Петрова	только заказ Сидорова	заказ Иванова и Петрова	заказ Петрова и Сидорова	заказ Иванова и Сидорова	заказ Иванова, Петрова и Сидорова
столы	5	20	8	25	28	13	33
стулья	110	82	4	192	86	114	196
ожидаемый доход мастерской	50	70	30	120	100	80	150
возможность выполнения	можно	можно	можно	нельзя	нельзя	можно	нельзя

Возможность одновременного выполнения двух заказов требует обоснования.

Одновременно выполнить заказ Иванова и Петрова нельзя (больше 120 стульев мастерская произвести не может).

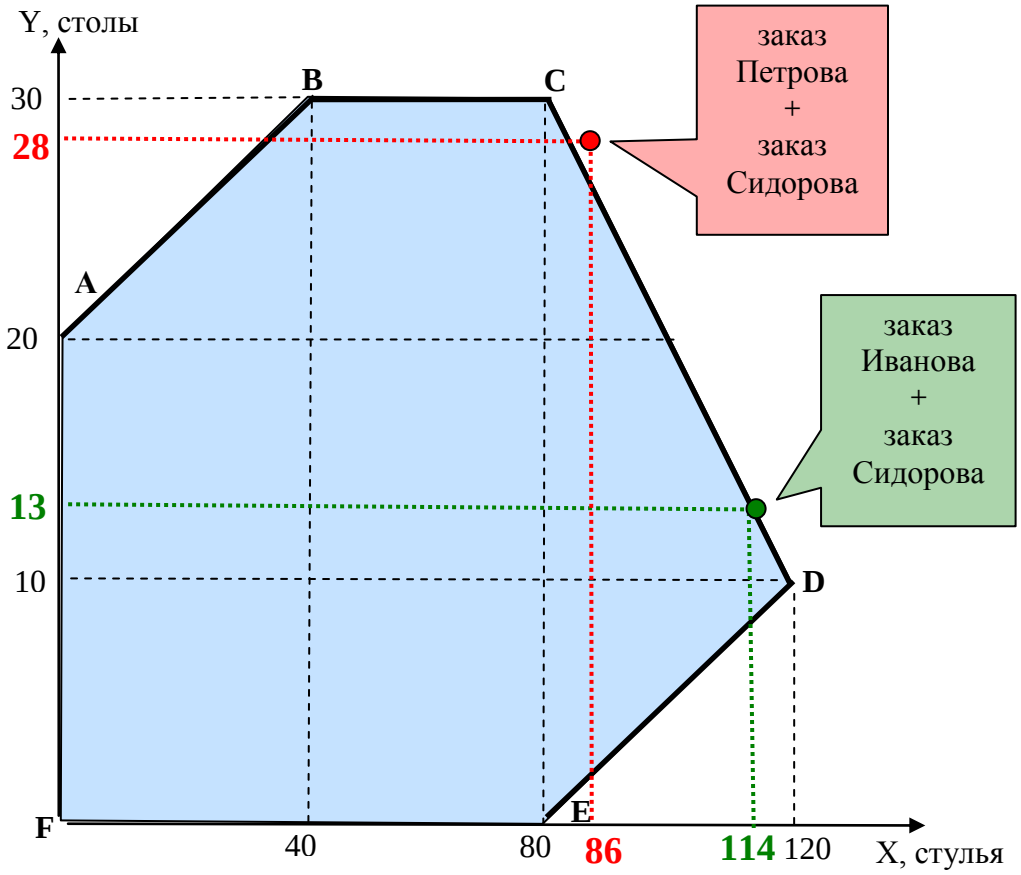
Одновременно выполнить заказ Петрова и Сидорова тоже нельзя. Предположим, что мастерская взялась бы за этот заказ, тогда 28 столов нужно изготовить силами старшего и среднего брата: средний брат сделает 10 столов, и 18 столов сделает старший брат. Стулья будет делать средний брат – 40 стульев в составе комплектов и младший брат – 40 стульев, старший же брат может сделать только (40-36)=4 стула, так как для него альтернативная стоимость 18 столов равна 18·2=36 стульев. Итак, при производстве 28 столов мастерская максимально может изготовить только (40+40+4)=84 стула, а это меньше требуемых 86, т.е. полностью выполнить эти два заказа нельзя.

А вот одновременно выполнить заказ Иванова и Сидорова можно (при производстве 13 столов мастерская максимально может изготовить ровно 114 стульев). При этом, средний брат делает 10 столов и 40 стульев, младший брат делает только стулья (40 штук) Старший брат изготавливает еще 3 стола, а так как альтернативная стоимость 1 стола для него равна 2-м стульям, то изготовив 3 стола он «потерял» возможность изготовить (3·2)=6 стульев, а значит он может изготовить всего 34 стула (40-6=34).

Специализация братьев при выполнении парного заказа (заказ Иванова+заказ Сидорова) показана в таблице.

	столы	стулья
Старший брат	3	34
Средний брат	10	40
Младший брат	нет	40
ВСЕГО	**13**	**114**

На графике показано, что парный заказ Петрова и Сидорова действительно выполнить нельзя (на его выполнение не хватает ресурсов), а заказ Иванова и Сидорова – можно, при этом ресурсы мастерской используются полностью.



Примечание. Оценку возможности выполнения парных заказов можно произвести, определив уравнение прямой линии, проходящей через точки Си D. Координаты этих точек известны: у точки С (80, 30), у точки D (120, 10). Легко вывести уравнение прямой, проходящей через эти две точки, используя следующее соотношение: $\frac{Y - Y_D}{X - X_D} = \frac{Y_C - Y_D}{X_C - X_D}$

.

Подставив соответствующие значения координат точек Си D, получаем

$$\frac{Y - 10}{X - 120} = \frac{30 - 10}{80 - 120}.$$

Это соотношение позволяет найти нужное нам уравнение прямой линии $Y = 70 - 0{,}5X$

Критерии оценивания

а) Показано на графике множество производственных возможностей мастерской – **8 баллов**.

Дано обоснование построения множества производственных возможностей мастерской – **7 баллов**.

б) Рассмотрены все возможности выполнения парных заказов – **6 баллов** (по 2 балла за каждый парный заказ).

Указано, чем занимается каждый из братьев при выполнении парного заказа (заказ Иванова+заказ Сидорова) и даны соответствующие пояснения – **3 балла**.

Показана на графике точка, соответствующая выбору мастеров принятого парного заказа (заказ Иванова+заказ Сидорова) – **1 балл**.

Задача 2. Аннуитет Ерофея (25 баллов)

31 декабря 2012 года Ерофей взял в «Бета-банке» некую сумму в кредит на срок 4 года по ставке 25% годовых. Договор предусматривает погашение кредита по популярной *аннуитетной* схеме: в конце каждого года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 25 %), а затем Ерофей переводит в банк фиксированный платеж в размере X рублей. Банк рассчитал, что для того, чтобы долг был полностью выплачен за 4 года, X должен равняться 625 тыс. рублей.

а) Найдите сумму, которую Ерофей взял в кредит;

б) В конце 2014 года рыночная ставка по кредиту снизилась до 15 % годовых. Несмотря на то, что, согласно текущему договору кредитования, ставка по кредиту Ерофея неизменна и равна 25 %, Ерофей придумал, как можно сэкономить на выплате процентов. 31 декабря 2014 года он закрыл кредит в «Бета-банке» досрочно, а сумму, необходимую для этого (за исключением текущего платежа по старому кредиту) он взял в кредит в «Гамма-банке». Ставка по новому кредиту равна 15 %; выплаты по нему производятся двумя равными платежами — в конце 2015 и 2016 года.

На сколько процентов уменьшится ежегодный платеж Ерофея в 2015 и 2016 годах в результате его действий?

Решение

а) **(13 баллов за пункт)**Обозначим искомую сумму за B. В конце первого года долг составит $1{,}25B - X = 1{,}25B - 625$. В конце второго года долг составит $1{,}25(1{,}25B - 625) - 625$. Продолжая эту цепочку, получаем, что в конце четвертого года долг равен

$1{,}25[1{,}25(1{,}25(1{,}25B - 625) - 625) - 625] - 625 = 0$.**(10 баллов)**

Раскрывая скобки и решая это уравнение, получаем, что $B = 1476$.**(3 балла)**

б) **(12 баллов за пункт)**На конец 2014 года сумма долга равна $1{,}25(1{,}25 \cdot 1476 - 625) - 625 = 900$ тыс. рублей. **(4 балла)**Именно эту сумму Ерофею надо взять в кредит в другом банке.

По аналогии с пунктом (а), платеж по новому кредиту будет удовлетворять уравнению $1{,}15(1{,}15 \cdot 900 - X) - X = 0$.**(4 балла)** Решая его, получаем, что $X \approx 553{,}6$ тыс. руб. **(3 балла)**Значит, платеж уменьшится примерно на $(1 - 553{,}6/625) \cdot 100\% \approx 11{,}4\%$.**(1 балл)**

Задача 3. Ассортимент при ограниченных финансовых возможностях (25 баллов)

Фирма является единственным производителем товаров X и Y. Издержки производства товара X описываются функцией $TC(X) = 10X + 5$, где X— количество товара X. Издержки производства товара Y равны $TC(Y) = 15Y + 10$, где Y — количество товара Y. Известны обратные функции спроса на эти продукты: $P_X = 20 - X$, $P_Y = 75 - 2Y$.

а) Какое количество каждого товара будет выпускать фирма, максимизирующая прибыль, если ее финансовые возможности ограничены суммой 300 ден. ед., и в пределах этой суммы затрат ее производственные возможности позволяют выпускать любые сочетания X и Y?

б) Экономический кризис привел к сокращению возможностей фирмы. Теперь на финансирование производства она может потратить не более 205 ден. ед. Какое количество X и Y следует теперь производить фирме, чтобы получить максимальную прибыль?

Решение

А) ***(15 баллов за пункт)***

Прежде всего, полезно определить оптимальный выпуск фирмы при отсутствии финансовых ограничений, чтобы выяснить, являются ли финансовые возможности фирмы лимитирующим фактором.

Так как товары X и Y производятся независимо друг от друга, то фирма получит максимум прибыли в том случае, если будет максимальна прибыль от каждого продукта. Поскольку функция прибыли для каждого продукта – парабола ветвями вниз, то:

$$\begin{cases} MR(X) = MC(X) \\ MR(Y) = MC(Y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 20 - 2X = 10 \\ 75 - 4Y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 5 \\ Y = 15 \end{cases}$$

$$TC(X = 5, Y = 15) = 10 \cdot 5 + 5 + 15 \cdot 15 + 10 = 290$$

То есть для производства оптимального набора, максимизирующего прибыль, необходимо 290 ден. ед., а не 300. Значит, финансовые ресурсы в данном случае не являются лимитирующими.

Б) ***(10 балов за пункт)***

В данном случае нужно маскимизировать прибыль при ограниченных финансовых возможностях:

$$\begin{cases} \pi = (20 - X) \cdot X + (75 - 2Y) \cdot Y - 10X - 5 - 15Y - 10 \rightarrow max \\ TC = 10X + 5 + 15Y + 10 = 205 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi = 10X - X^2 + 60Y - 2Y^2 - 15 \rightarrow max \\ 10X + 15Y = 190 \end{cases} \qquad (1)$$

Из ограничения (1): $X = 19 - 1.5Y$

Подставим в целевую функцию и найдем ее максимум:

$$\pi = 190 - 15Y - (19 - 1.5Y)^2 + 60Y - Y^2 - 15 = (175 - 361) + 102Y - 4.25Y^2$$

$$\frac{d\pi}{dY} = 102 - 8.5Y = 0$$

$$Y = 12$$

$$X = 1$$

Ответ: а) 5 единиц товара X и 15 единиц товара Y; б) 1 единица товара X и 12 единиц товара Y.

Задача 4. Молодильные яблоки (25 баллов)

В Тридевятом Царстве спрос на молодильные яблоки в 2014 году описывался функцией $Q_d = 40 - 2P$, а предложение — функцией $Q_s = 16P/3 - 100/3$, где Q— количество молодильных яблок в тоннах, а P— цена тонны яблок в рубликах. В 2015 году спрос на молодильные яблоки не изменился, а вот предложение выросло, да так, что продавцы готовы теперь при любом уровне цен поставлять на продажу на 50 % яблок больше по сравнению с прошлым годом. Казалось бы, хороший урожай должен был обрадовать продавцов яблок, однако этого не случилось, и обратились они к царю с

просьбой оказать содействие и выделить средства из казны для их поддержки.

а) Проведя необходимые расчеты, объясните, почему большой урожай не обрадовал продавцов молодильных яблок.

б) Царь дал распоряжение своим советникам — молодому и старому — подготовить рекомендации по оказанию поддержки продавцам молодильных яблок.

- Молодой советник предложил удержать цену на уровне прошлого года, скупив часть яблок, чтобы потом, если получится, продать их в Тридесятое Государство.
- Старый советник предложил не торопиться, а подождать до окончания сезона торговли яблоками, а потом выплатить всем продавцам разницу фактических цен этого и прошлого года. По его мнению, этот вариант обойдется дешевле для государственной казны.

Царь согласился с его доводами и подписал соответствующий указ, решив, что обнародует его после установления нового рыночного равновесия в 2015 году. Действительно ли рекомендации старого советника обойдутся государственной казне дешевле, если они не будут обнародованы до установления нового равновесия?

в) Когда царь беседовал со своими советниками, их разговор подслушал шут. У него родилась идея, как можно использовать полученную конфиденциальную информацию для личного обогащения. Все продумав и просчитав, он решил поделиться своими соображениями с представителями продавцов молодильных яблок до принятия ими решения о том, какой объем продавать в 2015 году. Шут попросил за свои услуги 20 % от суммы, которую получат продавцы яблок из государственной казны, если воспользуются его рекомендациями. Какие рекомендации разработал хитрый шут? Какую сумму он рассчитывает получить за свои «услуги»?

г) Покажите на графике расходы государственной казны в каждом из следующих случаев:

- Были бы приняты рекомендации молодого советника.
- Принятые рекомендации старого советника оставались бы тайной до установления нового равновесия.
- Продавцы яблок последуют рекомендациям хитрого шута.

Решение

а) Найдем равновесие для ситуации прошлого года.

Приравняв функции спроса и предложения, получаем: $40-2P=\frac{16}{3}P-\frac{100}{3}$;

$P_0=10$ рубликов.

Подставив цену в функцию, например, спроса находим, что $Q_0=40-2\cdot 10=20$ тонн.

Это значит, что выручка продавцов яблок в прошлом году была равна (10·20)=200 рубликов.

Найдем равновесие для ситуации нового года.

Новая функция предложения будет иметь вид $Qs=1{,}5\cdot(\frac{16}{3}P-\frac{100}{3})=8P-50$.

Приравняв функцию спроса и новую функцию предложения, получаем: $40-2P=8P-50$; $P_1=9$ рубликов.

Подставив цену в функцию, например, спроса находим, что $Q_1 = 40 - 2 \cdot 9 = 22$ тонны.

Это значит, что выручка продавцов яблок в новом году должна составить (9·22)=198 рубликов.

Итак, большой урожай яблок не обрадовал продавцов, так как несмотря на рост продаж их выручка в итоге снизится (198 меньше 200).

Дело в том, что при данном изменении цены спрос характеризуется как неэластичный, поэтому снижение цены приводит к снижению выручки.

б) **Рекомендации молодого советника** – скупить излишки яблок на рынке. При цене 10 рубликов величина спроса на рынке яблок – 20 тонн, а величина предложения (8·10-50)=30 тонн.

Излишек яблок на рынке равен 30-20=10 тонн. Если их скупать по цене 10 рубликов, то расходы казны составят 10·10=100 рубликов.

Рекомендации старого советника – дождаться окончания торгов без вмешательства со стороны государства, а потом компенсировать снижение цены.

На эти цели придется выделить (10–9) 22=22 рублика.

Это меньше, чем расходы, связанные с рекомендациями молодого советника.

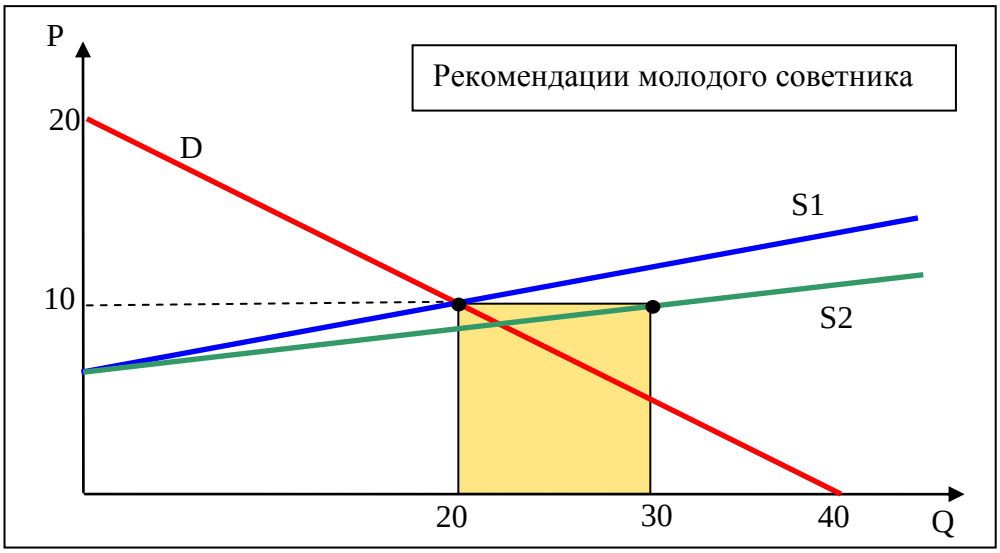
Таким образом, приняв рекомендации старого советника, можно сэкономить (100–22=78) рубликов.

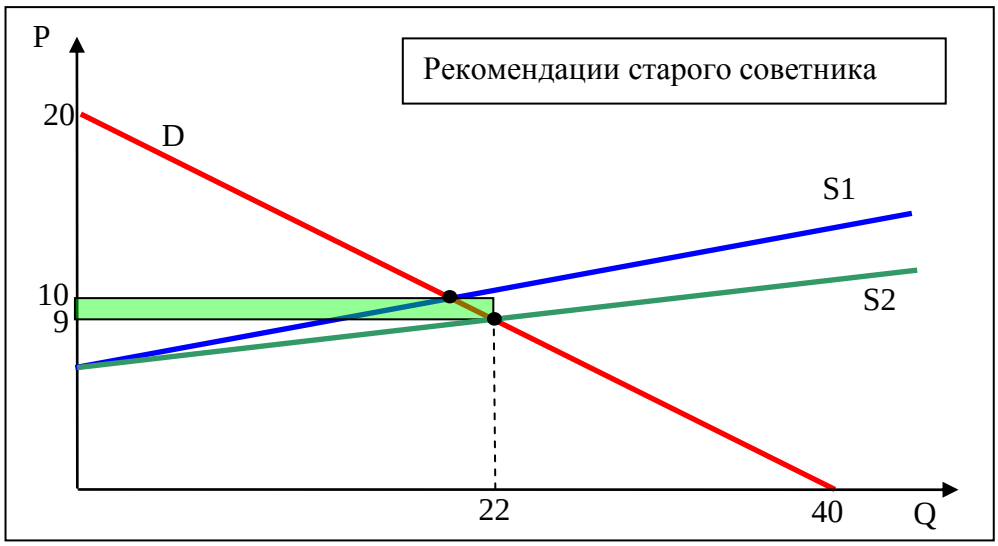
в) Шут предложил продавцам яблок вынести на продажу такое количество яблок, которое они готовы продать по прошлогодней цене, т.е. 30 тонн, а цену держать, соответствующую спросу. Найдем эту цену из уравнения $40 - 2P = 30$, т.е. цену надо установить 5 рубликов за тонну. Тогда государственная казна, согласно подготовленному указу царя, с каждой проданной тонны яблок будет компенсировать (10–5=5) рубликов. Всего из казны будет выплачено 5·30= 150 рубликов.

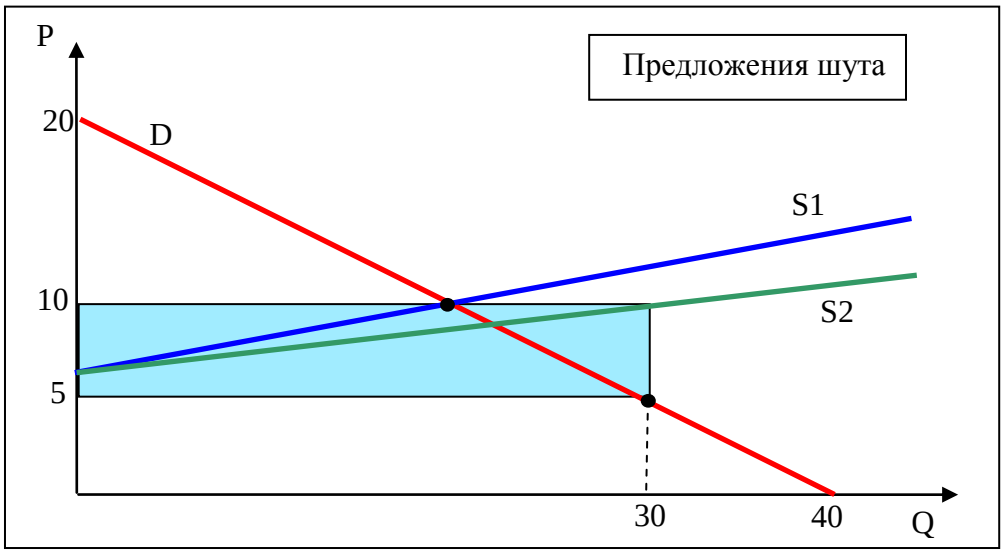
Двадцать процентов от этой суммы – это вознаграждение шута, которое составит 150·0,2=30 рубликов.

(Возможны и иные варианты рекомендаций шута, однако они требуют грамотного обоснования).

г) Смотри рисунки.







Критерии оценивания

а) Расчет выручки прошлого и текущего года и вывод об изменении выручки – **4 балла.**

б) Оценка расходов казны по рекомендациям советников царя – **6 баллов** (по 3 балла за расчет расходов казны по оценкам каждого из советников).

в) Оценка расходов казны после разглашения шутом инсайдерской информации и расчет причитающегося ему в этом случае вознаграждения – **9 баллов.**

г) Построение графиков – **6 баллов** (по 2 балла за каждый график).

Олимпиада по экономике для учащихся 11-х классов.
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

25февраля 2015 год.

Всего за задачи 100 баллов **Время выполнения 140 минут**

Задача 1. Аннуитет Ерофея (25 баллов)

Ерофей взял в «Бета-банке» кредит на сумму B на срок 12 месяцев по ставке $(100r)\%$ в месяц. Договор предусматривает погашение кредита по популярной *аннуитетной* схеме: в конце каждого месяца банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $(100r)$ %), а затем Ерофей переводит в банк некий фиксированный платеж. Банк рассчитал, что, для того чтобы долг был полностью выплачен за 12 месяцев, этот платеж должен равняться X.

а) Выразите B через X и r.

б) В конце третьего месяца Ерофей неожиданно получил на работе премию и решил погасить часть кредита досрочно. При досрочном погашении банк производит перерасчет платежа, который заемщик должен будет ежемесячно вносить в оставшиеся месяцы. Какую сумму Ерофей должен вернуть банку (помимо X) в конце третьего месяца, чтобы в месяцы с 4-го по 12-й платить не X, а Y, где $Y < X$? Ответ выразите через X, Y и r.

Решение

а) **(12 баллов за пункт)** Обозначим сумму долга Ерофея в конце месяца i за D_i. $D_1 = (1+r)B - X$; $D_2 = (1+r)D_1 - X = (1+r)^2B - (1+r)X - X$; $D_3 = (1+r)D_2 - X = (1+r)^3B - (1+r)^2X - (1+r)X - X$. Заметив закономерность, получаем, что $D_{12} = (1+r)^{12}B - (1+r)^{11}X - \cdots - (1+r)X - X$.**(10 баллов)**

С другой стороны, $D_{12} = 0$. **(1 балл)**Выражая из этого уравнения B, получаем, что

$$B = \frac{X}{1+r} + \frac{X}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{X}{(1+r)^{12}}.\textbf{(1 балл)}$$

Иными словами, первоначальная сумма долга равна приведенной стоимости всех будущих платежей по кредиту. Сумму, стоящую в правой части, можно свернуть по формуле суммы геометрической прогрессии. Окончательно получаем, что

$$B = \frac{X}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{12}}\right).$$

б) **(13 баллов за пункт)**

Решение 1 (эвристическое)

Обозначим сумму, которую заемщик возвращает досрочно, за Z. Заплатив Z в конце третьего месяца, заемщик в замен получает экономию $(X - Y)$ в платежах, которые он будет делать в месяцы с 4-ый по 12-ый. Таким образом, ситуация эквивалентна тому, что банк в начале четвертого месяца берет у Ерофея «кредит» в размере Z, который он затем возвращает Ерофею по аннуитетной схеме с ежемесячным «платежом» $X - Y$. Ставка «кредита» по-прежнему равна $(100r)\%$ в месяц, а срок «кредита» составляет 9 месяцев. Формулу, выражающую сумму кредита через размер

платежа и ставку процента, мы уже нашли в пункте (а); необходимо только заменить в ней X на $(X-Y)$, B на Z и 12 на 9.

Таким образом,

$$Z=\frac{X-Y}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^9}\right).$$

Решение 2 (непосредственное)

Обозначим сумму долга на конец третьего месяца до внесения заемщиком дополнительного взноса Z, за D_3, после внесения суммы Z — за $D_3{}'$. Таким образом, искомая величина Z равна $D_3-D_3{}'$.**(1 балл)**

Если бы Ерофей не внес сумму Z, то имели бы место следующие соотношения: $D_4=(1+r)D_3-X$; $D_5=(1+r)D_4-X=(1+r)^2D_3-(1+r)X-X$, и т. д.; $D_{12}=(1+r)^9D_3-(1+r)^8X-\dots-(1+r)X-X=0$.**(5 баллов)**

По аналогии с пунктом а), отсюда получаем, что сумма D_3 равна приведенной стоимости всех будущих платежей по кредиту, то есть

$$D_3=\frac{X}{1+r}+\frac{X}{(1+r)^2}+\dots+\frac{X}{(1+r)^9}=\frac{X}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^9}\right).\textbf{(1 балл)}$$

(Это выражение также можно получить, если в выражение $D_3=(1+r)^3B-(1+r)^2X-(1+r)X-X$ подставить выражение для B, найденное нами в пункте (а).)

Аналогичным образом, можно показать, что сумма $D_3{}'$ также должна быть равна приведенной стоимости будущих платежей по кредиту, только теперь, после внесения Z, каждый из платежей равен не X, а Y:

$$D_3{}'=\frac{Y}{1+r}+\frac{Y}{(1+r)^2}+\dots+\frac{Y}{(1+r)^9}=\frac{Y}{\mathrm{r}}\left(1-\frac{1}{(1+r)^9}\right).\textbf{(6 баллов)}$$

В итоге,

$$Z=D_3-D_3{}'=\frac{X-Y}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^9}\right).$$

Задача 2. Молодильные яблоки (25 баллов)

В Тридевятом Царстве спрос на молодильные яблоки в 2014 году описывался функцией $Q_d=40-2P$, а предложение — функцией $Q_s=16P/3-100/3$, где Q — количество молодильных яблок в тоннах, а P — цена тонны яблок в рубликах. В 2015 году спрос на молодильные яблоки не изменился, а вот предложение выросло, да так, что продавцы готовы теперь при любом уровне цен поставлять на продажу на 50 % яблок больше по сравнению с прошлым годом. Казалось бы, хороший урожай должен был обрадовать продавцов яблок, однако этого не случилось, и обратились они к царю с просьбой оказать содействие и выделить средства из казны для их поддержки.

а) Проведя необходимые расчеты, объясните, почему большой урожай не обрадовал продавцов молодильных яблок.

б) Царь дал распоряжение своим советникам — молодому и старому — подготовить рекомендации по оказанию поддержки продавцам молодильных яблок.

- Молодой советник предложил удержать цену на уровне прошлого года, скупив часть яблок, чтобы потом, если получится, продать их в Тридесятое Государство.
- Старый советник предложил не торопиться, а подождать до окончания сезона торговли яблоками, а потом выплатить всем продавцам разницу фактических цен этого и прошлого года. По его мнению, этот вариант

обойдется дешевле для государственной казны.

Царь согласился с его доводами и подписал соответствующий указ, решив, что обнародует его после установления нового рыночного равновесия в 2015 году. Действительно ли рекомендации старого советника обойдутся государственной казне дешевле, если они не будут обнародованы до установления нового равновесия?

в) Когда царь беседовал со своими советниками, их разговор подслушал шут. У него родилась идея, как можно использовать полученную конфиденциальную информацию для личного обогащения. Все продумав и просчитав, он решил поделиться своими соображениями с представителями продавцов молодильных яблок до принятия ими решения о том, какой объем продавать в 2015 году. Шут попросил за свои услуги 20 % от суммы, которую получат продавцы яблок из государственной казны, если воспользуются его рекомендациями. Какие рекомендации разработал хитрый шут? Какую сумму он рассчитывает получить за свои «услуги»?

г) Покажите на графике расходы государственной казны в каждом из следующих случаев:

- Были бы приняты рекомендации молодого советника.
- Принятые рекомендации старого советника оставались бы тайной до установления нового равновесия.
- Продавцы яблок последуют рекомендациям хитрого шута.

Решение

а) Найдем равновесие для ситуации прошлого года.

Приравняв функции спроса и предложения, получаем: $40-2P=\frac{16}{3}P-\frac{100}{3}$;

$P_0=10$ рубликов.

Подставив цену в функцию, например, спроса находим, что $Q_0=40-2\cdot 10=20$ тонн.

Это значит, что выручка продавцов яблок в прошлом году была равна (10·20)=200 рубликов.

Найдем равновесие для ситуации нового года.

Новая функция предложения будет иметь вид $Qs=1{,}5\cdot(\frac{16}{3}P-\frac{100}{3})=8P-50$.

Приравняв функцию спроса и новую функцию предложения, получаем: $40-2P=8P-50$; $P_1=9$ рубликов.

Подставив цену в функцию, например, спроса находим, что $Q_1=40-2\cdot 9=22$ тонны.

Это значит, что выручка продавцов яблок в новом году должна составить (9·22)=198 рубликов.

Итак, большой урожай яблок не обрадовал продавцов, так как несмотря на рост продаж их выручка в итоге снизится (198 меньше 200).

Дело в том, что при данном изменении цены спрос характеризуется как неэластичный, поэтому снижение цены приводит к снижению выручки.

б) **Рекомендации молодого советника** – скупить излишки яблок на рынке. При цене 10 рубликов величина спроса на рынке яблок – 20 тонн, а величина предложения (8·10-50)=30 тонн.

Излишек яблок на рынке равен 30-20=10 тонн. Если их скупать по цене 10 рубликов, то расходы казны составят 10·10=100 рубликов.

Рекомендации старого советника – дождаться окончания торгов без вмешательства со стороны государства, а потом компенсировать снижение цены.

На эти цели придется выделить (10–9) 22=22 рублика.

Это меньше, чем расходы, связанные с рекомендациями молодого советника.

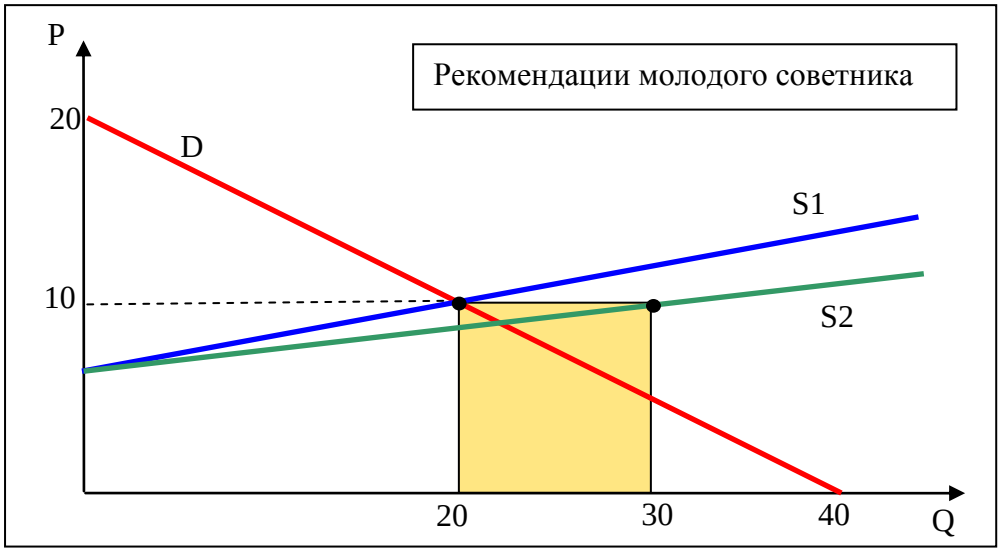
Таким образом, приняв рекомендации старого советника, можно сэкономить (100–22=78) рубликов.

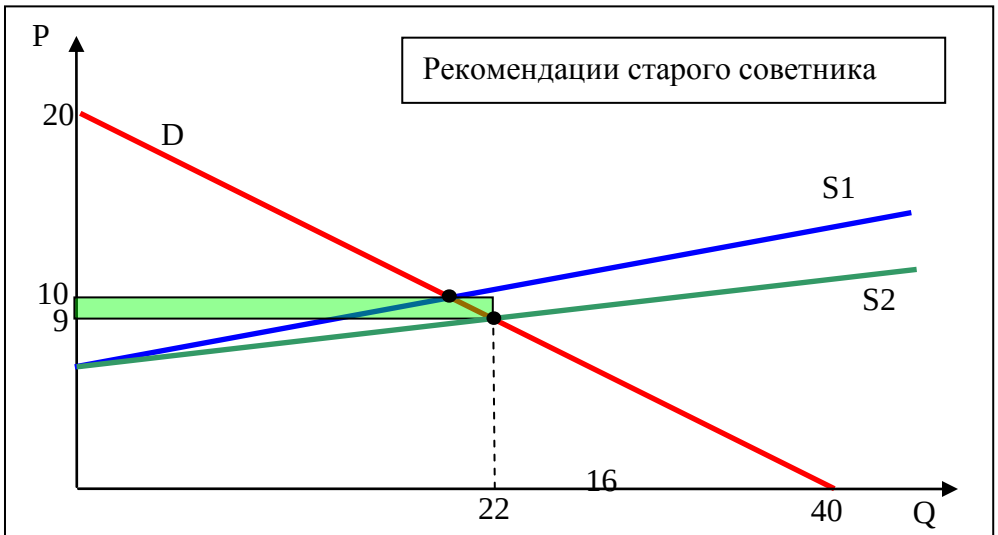
в) Шут предложил продавцам яблок вынести на продажу такое количество яблок, которое они готовы продать по прошлогодней цене, т.е. 30 тонн, а цену держать, соответствующую спросу. Найдем эту цену из уравнения $40-2P=30$, т.е. цену надо установить 5 рубликов за тонну. Тогда государственная казна, согласно подготовленному указу царя, с каждой проданной тонны яблок будет компенсировать (10–5=5) рубликов. Всего из казны будет выплачено 5·30= 150 рубликов.

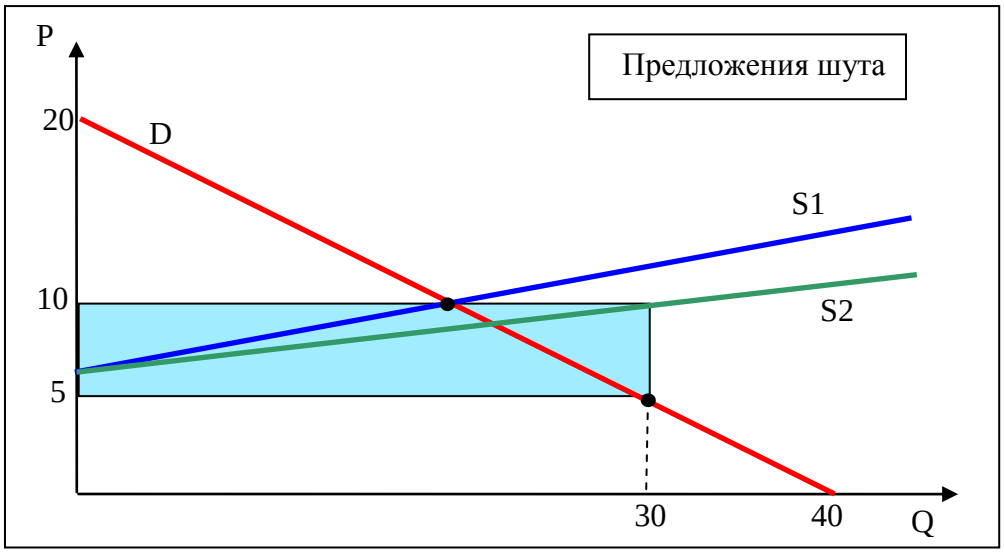
Двадцать процентов от этой суммы – это вознаграждение шута, которое составит 150·0,2=30 рубликов.

(Возможны и иные варианты рекомендаций шута, однако они требуют грамотного обоснования).

г) Смотри рисунки.







Критерии оценивания

а) Расчет выручки прошлого и текущего года и вывод об изменении выручки – **4 балла.**

б) Оценка расходов казны по рекомендациям советников царя – **6 баллов** (по 3 балла за расчет расходов казны по оценкам каждого из советников).

в) Оценка расходов казны после разглашения шутом инсайдерской информации и расчет причитающегося ему в этом случае вознаграждения – **9 баллов.**

г) Построение графиков – **6 баллов** (по 2 балла за каждый график).

Задача 3. Жюльен из мухоморов — 2 (25 баллов)

Жюльен из мухоморов — деликатес, пользующийся особой популярностью среди гномов. Рецепт его приготовления, однако, известен только лесным гномам. Министр финансов королевства лесных гномов решил организовать продажу деликатеса соседям — горным гномам. Он настоял на том, что экспорт жульена должен быть государственной монополией, которая будет максимизировать прибыль.

Приготовленный жюльен герметично упаковывается в *кокотницы* (маленький металлический ковшик для подачи жюльена) и расфасовывается по 4 кокотницы в коробку. Издержки производства жюльена описываются функцией $TC = 20 + 10q + q^2/2$, где q — количество кокотниц. Спрос на деликатес в стране горных гномов описывается функцией $N = 225 - 0{,}5P$, где N — количество коробок, покупаемых за неделю, P — цена за коробку.

Король горных гномов ввел пошлину на ввоз жюльена в размере 10 ден. ед. с каждой ввозимой коробки. Кроме того, дорога в королевство горных гномов лежит через страну эльфов, которые за провоз товара по своей территории забирают 5 коробок жюльена каждую неделю.

Оценив потери государственной монополии от поборов эльфов, министр финансов лесных гномов решил попробовать договориться с ними о замене натурального платежа денежным (также не зависящим от объема продаж). Более того, он убедил министра финансов королевства горных гномов, что замена натурального платежа за провоз жюльена по территории страны эльфов денежным увеличит доходы и

казны королевства горных гномов. Поэтому министры договорились, что платить эльфам денежный налог они будут совместно.

Какую наибольшую сумму денежного налога гномы будут готовы сообща платить эльфам за отмену натурального налога?

Решение

Гномы могут предложить эльфам не больше, чем они выиграют от отмены натуральной платы за провоз.

Рассчитаем прибыль от продажи жюльена и доходы от налогов при условии натуральной платы за провоз.

$$N = \frac{q}{4} \rightarrow q = 4N$$

$$TC = 20 + 10 \cdot 4N + 0.5(4N)^2 = 20 + 40N + 8N^2$$

Также в функции издержек нужно учесть выплачиваемую пошлину 10 ден. ед. за коробку и что за 5 коробок пошлина не вносится, так как они изымаются эльфами:

$$TC = 20 + 40N + 8N^2 + 10(N - 5) = 50N + 8N^2 - 30$$

Функция дохода от продажи:

$$TR = \big(450 - 2(N - 5)\big) \cdot (N - 5) = -2N^2 + 470N - 2300$$

Функция прибыли – парабола, ветви которой направлены вниз. Поэтому ее максимум находим из равенства $MC = MR$

$50 + 16N = -4N + 470$
$20Q = 420$
$N = 21$
$P = 450 - 2(21 - 5) = 418$
$TR = (21 - 5) * 418 = 6688$
$TC = 50 \cdot 21 + 8 \cdot 21^2 - 30 = 4548$
$\pi = 2140$ ***(15 баллов за верное определение прибыли)***

Доходы казны горных гномов: $10 \cdot (21 - 5) = 160$

(1 балл за верное определение доходов казны)

Теперь рассмотрим ситуацию без натуральной платы за провоз. Тогда

$TC = 20 + 40Q + 8Q^2 + 10Q = 20 + 50Q + 8Q^2$
$TR = (450 - 2Q) \cdot Q$
$MC = 50 + 16Q = 450 - 4Q = MR$
$Q = 20$
$P = 410$
$TR = 8200$
$TC = 4220$
$\pi = 3980$ ***(5 баллов за верное определение прибыли)***

Налоговые поступления в казну горных гномов $20 \cdot 10 = 200$ ден. ед.

(1 балл за верное определение доходов казны)

Таким образом, от (полной) отмены натуральной платы выигрыш лесных гномов 1840 ден. ед., выигрыш горных гномов 40 ден. ед.

Очевидно, сумма этих выигрышей (1880 ден. ед.) и есть максимальная величина оплаты,

которую гномы могут предложить эльфам за проезд по их территории. ***(3 балла)*** Если она фиксирована, то выступает как постоянные издержки и не влияет на выбор объема производства лесными гномами, уменьшается только их прибыль. Доходы казны горных гномов в таком случае также зависят только от величины суммы, которую они будут платить эльфам.

Ответ: 1880 ден. ед. – максимальная плата, которую могут предложить гномы вместо натурального платежа. При такой плате весь выигрыш гномов сводится к нулю, но они и не проигрывают. При плате меньшей 1880 ден. ед. у гномов появляется выигрыш.

Задача 4. Счастливые часы (25 баллов)

Сеть кафе «У Аристарха» имеет сотни заведений по всему городу. Владелец сети, Аристарх, заметил, что в разное время дня разное количество посетителей хотят заказать фирменное блюдо его ресторанов. Все рестораны открываются в 12 часов, и если одна порция стоит p рублей, в первый час работы посетители покупают $q = 132 - p$ тыс. порций во всей сети. В последний час работы кафе (с 21 до 22 часов) посетители заказывают $q = 141 - p$ тыс. порций. Аристарх вывел следующую зависимость купленных порций от цены и времени: если в период с t до $t + 1$ часов (t— целые числа от 12 до 21) цена составляет p рублей за порцию, то общее количество купленных порций за это время составляет $q = 120 + t - p$ тыс. Производство одной порции стоит 40 рублей, владелец сети старается сделать так, чтобы прибыль (разница между его доходами и расходами) за день работы была максимальной. Считайте, что кроме фирменного блюда в кафе ничего не продается.

а) Какую цену нужно установить Аристарху, если он не хочет менять ее в течение дня?

б) Сын Аристарха, Ксенофонт, предложил папе ввести в его ресторанах «счастливые часы»: назначать одну цену на фирменное блюдо утром (с открытия до X часов) и другую цену вечером (с X часов до закрытия). «Счастливыми часами» называется тот период, когда цена ниже. Не проводя расчетов, объясните, в какое время (в первой части дня или во второй) Аристарху нужно устроить «счастливые часы», и предположите, в какую сторону утренняя и вечерняя цена будет отличаться от цены в пункте а). Приведите содержательное объяснение, почему прибыль при такой политике может увеличиться.

в)Рассчитайте оптимальную длину счастливых часов.

Решение

а) **(8 баллов за пункт)** Считая, что в каждый из рабочих часов в кафе продается ненулевое количество порций, найдем общий спрос:

$$Q = (132 - p) + (133 - p) + \cdots + (141 - p) = 1365 - 10p. \qquad \textbf{(4 балла)}$$

Тогда прибыль за день будет равна:

$$\pi = (1365 - 10p)(p - 40).$$

Эта функция является квадратичной параболой с ветвями вниз, вершина ее будет максимумом **(1 балл)**. Она расположена посередине между нулями функции:

$$p = \frac{136{,}5 + 40}{2} = 88{,}25.$$

(3 балла) Это и есть оптимальная цена.

б) Можно заметить, что по мере приближения вечера спрос на фирменное блюдо становится численно больше, а эластичность его снижается. Поскольку издержки не меняются в течение дня, это означает, что цена должна быть выше вечером. **(5 баллов)**

в) **(12 баллов за пункт)**Пусть T— длина счастливых часов, p_1 — цена во время счастливых часов, p_2 — цена после их окончания. Тогда спрос в счастливые часы составит:

$$Q_1 = (132 - p_1) + (133 - p_1) + \cdots + (132 + (T-1) - p_1) = T \cdot \left(131{,}5 + \frac{T}{2} - p_1\right)$$

(3 балла) (свернуто по формуле суммы арифметической прогрессии: количество членов, умноженное на среднее арифметическое между первым и последним). Спрос после окончания счастливых часов составит:

$$Q_2 = (132 + T - p_2) + \cdots + (141 - p_2) = (10 - T) \cdot \left(136{,}5 + \frac{T}{2} - p_2\right).$$ **(3 балла)**

Тогда функция прибыли имеет вид:

$$\pi = T \cdot \left(131{,}5 + \frac{T}{2} - p_1\right)(p_1 - 40) + (10 - T) \cdot \left(136{,}5 + \frac{T}{2} - p_2\right)(p_2 - 40).$$ **(1 балл)**

Допустим, T — какая-то длина счастливых часов. Тогда цены, максимизирующие прибыль, можно найти как вершины двух парабол с ветвями вниз — первого и второго слагаемого в функции прибыли. При максимизации всей функции ни одна из этих цен не оказывает влияния на «чужую» часть прибыли, поэтому параболы можно максимизировать отдельно. **(рассуждение о параболах и способе максимизации — 3 балла)**

Получаем:

$$p_1^* = 85{,}75 + \frac{T}{4}, \qquad p_2^* = 88{,}25 + \frac{T}{4}.$$

Осталось подставить найденные значения в функцию прибыли:

$$\pi = T \cdot \left(131{,}5 + \frac{T}{2} - \left(85{,}75 + \frac{T}{4}\right)\right)(p_1 - 40) + (10 - T) \cdot \left(136{,}5 + \frac{T}{2} - \left(88{,}25 + \frac{T}{4}\right)\right)(p_2 - 40).$$

Упрощая, получаем:

$$\pi = T \cdot \left(45{,}75 + \frac{T}{4}\right)^2 + (10 - T) \cdot \left(48{,}25 + \frac{T}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}(-T^2 + 10T + 37249).$$

Эта квадратичная парабола с ветвями вниз имеет максимум в точке $T^* = 5$**(2 балла)**, это и есть оптимальная длина счастливых часов. Можно убедиться, что цена в первой части дня равна 87, а во второй части дня цена равна 89,5, то есть вечерняя цена, как и было предсказано в пункте б), выше.

Председатель оргкомитета,
начальник управления образовательной политики *В.Н. Щукин*

Министерство образования, науки и инновационной политики Новосибирской области * ДЛЯ ДОКУМЕНТОВ